Réponses – GME5
1^{e} année ingénieur ENSGSI

G. Vinsard

23 juin 2008

`Comment fait-on pour rendre une équation différentielle du premier ordre autonome? (il y avait un exemple dans le poly que nous n'avons pas traité, j'aimerais bien avoir la réponse)`

L'exemple du poly (fascicule équations différentielles ordinaires, p. 12) est

$$dx/dt = -t\,x \;;\; x(0) = 1$$

On introduit la fonction vectorielle du temps

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_0(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix}$$

telle que

$$\frac{dy_0}{dt} = 1 \text{ et } y_0(0) = 0$$

on voit que

$$y_0(t) = t$$

et donc que si

$$\frac{dy_1}{dt} = -y_0\,y_1 \text{ et } y_1(0) = 1$$

alors

$$y_1(t) = x(t)$$

Il ne reste plus qu'à ré-écrire ces équations comme

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_0(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -y_0\,y_1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} y_0(0) \\ y_1(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

pour voir qu'on a obtenu un système autonome.

`Comment fait-on pour appliquer Runge Kutta avec une équation du second ordre?`

L'exemple du poly (fascicule équations différentielles ordinaires, p. 11)

$$l\frac{d^2i}{dt^2} + r\,\frac{di}{dt} + \frac{i}{c} = 0;\quad i(0) = i_0;\quad \frac{di}{dt}(0) = q_0$$

on pose

$$x_1(t) = \frac{di}{dt}(t) \;;\; x_2(t) = i(t)$$

d'où

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1$$

et

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{d^2 i}{dt^2} = -\frac{1}{l}\left(r\,\frac{di}{dt} + \frac{i}{c}\right) = -\frac{1}{l}\left(r\,x_1 + \frac{x_2}{c}\right)$$

il reste à rassembler pour trouver

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{l}\left(r\,x_1 + \frac{x_2}{c}\right) \\ x_1 \end{pmatrix}$$

qui est un système du premier ordre.